

TD n°7: Fonctions spéciales

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1,2,5,6,7,3. Les exercices marqués d'un  sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

La fonction Γ .

Exercice 1. Une formule due à Euler.

A l'aide de la formule du produit de Γ , démontrer que

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(1+s)\dots(n+s)} = \frac{1}{s} \prod_{n \geq 1} \frac{(1 + 1/n)^s}{(1 + s/n)}$$

pour $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$

Exercice 2. Le théorème de Bohr-Mollerup.

Cet exercice vise à prouver le théorème de Bohr-Mollerup, qui dit que $t \mapsto \Gamma(t)$ est la seule fonction positive sur $\mathbb{R}_{>0}$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $F(t+1) = tF(t)$;
- (ii) $t \mapsto F(t)$ est logarithmiquement convexe, c'est-à-dire que $\log F$ est convexe;
- (iii) $F(1) = 1$.

1. Démontrer qu'une telle F vérifie nécessairement $F(n) = (n-1)!$
2. Démontrer qu'elle vérifie, pour $t \in]0, 1]$ et $n > 0$:

$$\log F(n+t) \leq \log F(n) + t \log(n).$$

3. Démontrer également, pour $t \in]0, 1]$ et $n > 1$, que

$$(t+1) \log F(n) \leq \log F(n+t) + t \log F(n-1).$$

4. En déduire que pour $t \in]0, 1]$, $n > 1$, on a

$$\frac{(n-1)^t (n-1)!}{t(t+1)\dots(t+n-1)} \leq F(t) \leq \frac{n^t (n-1)!}{t(t+1)\dots(t+n-1)}.$$

5. En déduire que $F(t) = \Gamma(t)$ pour $t \in]0, 1]$ et conclure.

Exercice 3. La fonction digamma.

On définit la fonction $\psi(s) = \text{dlog} \Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ méromorphe sur $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que ψ satisfait les équations fonctionnelles $\psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s}$ et $\psi(s) - \psi(1-s) = -\pi \cot(\pi s)$.
2. A l'aide de la formule du produit pour la fonction Γ , démontrer que

$$\psi(s) = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right).$$

3. Démontrer que le développement en série entière de ψ au voisinage de 1 est donné par

$$\psi(1+s) = -\gamma + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) s^n.$$

¹Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

4. Démontrer, pour $\Re(s) > 0$

$$\psi(s) = -\gamma - \int_0^\infty e^{-st} + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sum_{n=1}^N e^{-nt} - e^{-(n+s)t} dt$$

5. Démontrer

$$\psi(s) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-st}}{1 - e^{-t}} \right) dt - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-st}}{1 - e^{-t}} e^{-(N+1)t} dt$$

et en déduire la représentation intégrale

$$\psi(s) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-st}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

On admettra la valeur de l'intégrale

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt.$$

Exercice 4. La formule de Stirling.

On va utiliser la représentation intégrale de l'exercice précédent et isoler les termes non-bornés quand s est grand pour en déduire la formule de Stirling pour $\log \Gamma(s)$.

1. Démontrer l'égalité

$$\log(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-st}}{t} dt$$

et en déduire

$$\psi(s+1) = \frac{1}{2s} + \log(s) - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) e^{-st} dt.$$

2. En déduire l'égalité :

$$\log \Gamma(s+1) = s \log(s) - s + \frac{1}{2} \log(s) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-st}}{t} dt + C$$

où C est une constante d'intégration. On pensera à vérifier la convergence de l'intégrale en 0.

3. Vérifier que la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{2t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t(e^t - 1)}$$

a sa dérivée intégrable sur $\mathbb{R}_{>0}$. En déduire à l'aide d'une IPP que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-st}}{t} dt = O(1/s).$$

4. En déduire la formule de Stirling : pour $\Re(s) > 0$, on a

$$\log \Gamma(s+1) = s \log(s) - s + \frac{1}{2} \log(s) + C + O(1/s).$$

Déterminer la constante C à l'aide de la formule de Stirling usuelle sur $\mathbb{N}$.

La fonction ζ et les séries de Dirichlet.

Exercice 5. Le produit eulérien.

On démontre l'égalité

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

où le produit porte sur les nombres premiers. Pour $x > 0$ réel, on note S_x l'ensemble des nombres entiers naturels dont tous les facteurs premiers sont $\leq x$.

1. Démontrer que pour $x > 0$ réel, $\Re(s) > 1$, on a

$$\left| \prod_{p \leq x} \left(\sum_{k \leq M} p^{-sk} \right) - \sum_{n \in S_x, n \leq 2^M} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n > 2^M} \frac{1}{n^{\Re(s)}}.$$

2. En déduire que

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n \in S_x} \frac{1}{n^s}.$$

3. Démontrer à l'aide de cette formule que

$$\left| \prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}} - \zeta(s) \right| \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n^{\Re(s)}}$$

et en déduire la formule du produit eulérien pour ζ .

4. Dans le même esprit, fixons $f : \mathbb{Z}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction totalement multiplicative, c'est-à-dire que $f(mn) = f(m)f(n)$. On suppose également que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$$

converge absolument pour $\Re(s) > \sigma_0$. Démontrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}$$

pour $\Re(s) > \sigma_0$.

Exercice 6. La dérivée logarithmique de ζ .

On définit la fonction Λ de Von Mangoldt par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & n = p^k \text{ avec } p \text{ premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que pour $\Re(s) > 1$, on a

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Exercice 7. L'anneau des séries de Dirichlet.

Formellement, l'anneau des séries de Dirichlet est l'anneau des suites de nombres complexes muni de la convolution arithmétique :

$$(a * b)_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}.$$

On dit qu'une série de Dirichlet est convergente s'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que la série réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ converge.

1. Démontrer que la convolution arithmétique est commutative, associative, a pour unité la série de Dirichlet formelle associée à $(1, 0, 0, \dots)$ et distributive sur l'addition.
2. Démontrer qu'une série de Dirichlet convergente définit une fonction holomorphe dans un demi-plan supérieur $\Re(s) > \sigma$.
3. Démontrer que deux séries de Dirichlet convergentes définissent la même fonction si, et seulement si elles sont égales.

4. Démontrer que si les séries de Dirichlet correspondant à $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes, alors leur convolution arithmétique est convergente et vérifie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(a * b)_n}{n^s} = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s} \right)$$

pour $\Re(s) >> 0$.

5. Démontrer qu'une série de Dirichlet formelle est inversible si, et seulement si $a_1 \neq 0$.
6. Démontrer que l'inverse d'une série de Dirichlet convergente est convergent.

Indication : on pourra considérer un $\sigma >> 0$ tel que $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq 1$

Exercice 8. Produits eulériens formels $\clubsuit$

On munit l'anneau des séries de Dirichlet formelles de la distance suivante :

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) = \frac{1}{\min\{n \geq 1 : a_n \neq b_n\}}.$$

1. Démontrer que d est bien une distance. On démontrera que $d(f, h) \leq \max(d(f, g), d(g, h))$.
2. Démontrer que dans l'anneau des séries de Dirichlet,

$$\left(1 - \frac{a}{m^s}\right) \cdot \left(\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{m^{ks}}\right) = 1$$

3. On fixe une suite $(a_p)_p$ de nombres complexes indexés sur les nombres premiers. Démontrer que

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - a_p p^{-s}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

où $a_n = \prod a_p^{v_p(n)}$ si $n = \prod p^{v_p(n)}$ et la convergence est entendue au sens de la distance d .

4. En déduire qu'une série de Dirichlet

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

admet un produit de la forme ci-dessus si, et seulement si $a_{mn} = a_m a_n$ pour tous m, n .

5. Soit (b_{p^k}) une famille de nombres complexes indexée sur les puissances des nombres premiers, vérifiant $b_1 = 1$. On pose

$$f_p(s) = \sum_{k \geq 0} \frac{b_{p^k}}{p^{ks}}.$$

Démontrer qu'on a convergence du produit infini

$$\prod_p f_p(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^s}$$

où $b_n = \prod b_{p^{v_p(n)}}$ si $n = \prod p^{v_p(n)}$.

6. Démontrer qu'une série de Dirichlet formelle $(b_n)_n$ admet une représentation comme produit infini de séries entières en les p^{-s} si et seulement si $b_{nm} = b_n b_m$ pour tous n, m premiers entre eux : on dit que b est faiblement multiplicative.
7. En déduire que les suites faiblement multiplicatives (ou les séries de Dirichlet associées) forment un sous-groupe des inversibles de l'anneau des séries de Dirichlet formelles. Expliciter un isomorphisme entre ce sous-groupe et le groupe $\Lambda(\mathbb{C})^\mathbb{N}$, où $\Lambda(\mathbb{C})$ est le groupe multiplicatif des séries entières à coefficients complexes de terme constant 1.